

11. Aufgabenblatt: Analysis 2

Lehrkräfteweiterbildung, 12 Q, Winter 2023/24

Dozent: Hans-Joachim von Höhne

Aufgabe 11.1 Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folgende Funktion.

$$f(x, y) = x^y := e^{\ln(x)y}$$

Untersuchen Sie, wo f lokale Extrema bzw. Sattelpunkte hat.

Aufgabe 11.2 Wir untersuchen, in welchen Punkten $(0, y)$ auf der y -Achse die Funktion f aus Aufg. 11.1 stetig fortsetzbar ist. Zeigen Sie:

1) Für alle $b \neq 0$ gilt:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,b)} e^{\ln(x)y} = \begin{cases} 0 & \text{für } b > 0, \\ +\infty & \text{für } b < 0. \end{cases}$$

2) Folgender Grenzwert existiert nicht.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^y$$

Genauer gilt: Für jedes $c > 0$ gibt es eine Folge $((x_k, y_k))_k$ in $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, y_k) = (0, 0) \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{y_k} = c.$$

Fazit: Die Funktion $f(x, y) = x^y$ ist in allen Punkten $(0, y)$ mit $y > 0$ stetig fortsetzbar durch $f(0, y) = 0^y := 0$; aber in den Punkten $(0, y)$ mit $y \leq 0$ ist sie nicht stetig fortsetzbar, insbesondere nicht im Punkt $(0, 0)$.